TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Sur les complexes croisés, ω-groupoïdes, et* T-*complexes.*

Note (*) de **Ronald Brown** et **Philip J. Higgins**, présentée par M. Henri Cartan.

Nous définissons trois catégories algébriques qui se présentent dans la construction et l'application des versions du théorème de van Kampen en dimensions supérieures et nous indiquons des équivalences entre eux.

We define and indicate the equivalence of three algebraic categories which arise in the construction and application of higher dimensional forms of the van Kampen Theorem.

Les applications de quelques-uns des résultats ci-dessous seront publiés dans une prochaine publication.

Un *complexe croisé* (sur un groupoïde) :

$$C : \quad \ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\delta} C_n \to \ldots \to C_2 \xrightarrow{\delta} C_1 \underset{\delta^1}{\overset{\delta^0}{\rightrightarrows}} C_0$$

satisfait aux axiomes suivantes :

($\mathscr{C}$ 1) C_1 est un groupoïde avec ensemble des sommets C_0, applications initiale δ^0, et finale δ^1. Nous écrivons $C_1(p, q)$ pour l'ensemble des flèches de p vers q ($p, q \in C_0$) et $C_1(p)$ pour le groupe $C_1(p, p)$.

($\mathscr{C}$ 2) Pour $n \geqq 2$, C_n est une famille de groupes $\{C_n(p)\}_{p \in C_0}$ et pour $n \geqq 3$ les groupes $C_n(p)$ sont abéliens.

($\mathscr{C}$ 3) Le groupoïde C_1 opère à droite dans chaque C_n ($n \geqq 2$) par une action qu'on écrit $(x, a) \mapsto x^a$. Ici, si $x \in C_n(p)$ et $a \in C_1(p, q)$, alors $x^a \in C_n(q)$, et les lois usuelles sont valables (donc si p et q se trouvent dans la même composante de C_1, les groupes $C_n(p)$ et $C_n(q)$ sont isomorphes).

($\mathscr{C}$ 4) Pour $n \geqq 2$, $\delta : C_n \to C_{n-1}$ est un morphisme de groupoïdes sur C_0 qui préserve l'action de C_1, où C_1 opère sur les groupes $C_1(p)$ par conjugaison.

($\mathscr{C}$ 5) $\delta\delta = 0$.

($\mathscr{C}$ 6) Si $c \in C_2$ alors δc opère trivialement sur C_n pour $n \geqq 3$ et opère sur C_2 par conjugaison par c.

Ces complexes croisés sont les objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ dans laquelle un morphisme f de C à C′ est une famille d'applications $f_n : C_n \to C'_n$ ($n \geqq 0$) compatibles avec toutes les structures de groupoïdes, les applications du bord δ et les actions de C_1 et C'_1.

Quand C_0 est un seul point, nous appelons C un *complexe croisé sur un groupe.* De tels complexes se présentent comme « group systems » dans ([1]), « homotopy systems » dans ([8]), comme « N-fold extensions » et « crossed resolutions » de groupes dans [([6]), ([7])].

Ces axiomes impliquent que, pour chaque $p \in C_0$, $(C_2(p), C_1(p), \delta)$ est un module croisé. Dans ([4]) on a montré que la catégorie des modules croisés est équivalente à une catégorie de groupoïdes doubles à un seul sommet et avec connexions. Dans ([3]) on a utilisé ce fait pour obtenir une version du théorème de van Kampen en dimension 2. Le théorème en dimension n qu'on décrit dans ([2]), dépend de l'équivalence plus générale entre la catégorie $\mathscr{C}$ des complexes croisés et une catégorie $\mathscr{G}$ de ω-groupoïdes, décrite ci-dessous.

Un ω-*groupoïde* $G = \{ G_n \}_{n \geq 0}$ est un complexe cubique avec les applications de face $\partial_i^\alpha : G_n \to G_{n-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = 0, 1$) et les dégénérescences $\varepsilon_i : G_{n-1} \to G_n$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) dont les axiomes suivants sont satisfaits :

($\mathcal{G}$ 1) Si $n \geq 1$, il existe, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, une structure de groupoïde avec les flèches G_n, les sommets G_{n-1}, les applications initiales et finales ∂_i^0, ∂_i^1, et les flèches d'identité $\varepsilon_i y$ ($y \in G_{n-1}$). On dénote les opérations dans ce groupoïde $\underset{i}{+}$, $\underset{i}{-}$.

($\mathcal{G}$ 2) Les n structures de groupoïdes sur (G_n, G_{n-1}) sont mutuellement compatibles, c'est-à-dire

$$\partial_i^\alpha (a \underset{j}{+} b) = \begin{Bmatrix} \partial_i^\alpha a \underset{j-1}{+} \partial_i^\alpha b \text{ si } i < j \\ \partial_i^\alpha a \underset{j}{+} \partial_i^\alpha b \text{ si } i > j \end{Bmatrix},$$

$$\varepsilon_i (a \underset{j}{+} b) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_i a \underset{j+1}{+} \varepsilon_i b \text{ si } i \leq j \\ \varepsilon_i a \underset{j}{+} \varepsilon_i b \text{ si } i > j \end{Bmatrix},$$

et $(a \underset{i}{+} b) \underset{j}{+} (c \underset{i}{+} d) = (a \underset{j}{+} c) \underset{i}{+} (b \underset{j}{+} d)$ si $i \neq j$, chaque fois que tous les deux membres sont définis.

($\mathcal{G}$ 3) Si $n \geq 1$, il existe pour chaque $j = 1, 2, \ldots, n$, une application $\Gamma_j : G_n \to G_{n+1}$, qu'on appelle une *connexion*, les faces de $\Gamma_j x$ étant données par

$$\partial_j^0 \Gamma_j x = \partial_{j+1}^0 \Gamma_j x = x,$$

$$\partial_j^1 \Gamma_j x = \partial_{j+1}^1 \Gamma_j x = \varepsilon_j \partial_j^1 x,$$

$$\partial_i^\alpha \Gamma_j x = \begin{Bmatrix} \Gamma_{j-1} \partial_i^\alpha x \text{ si } i < j \\ \Gamma_j \partial_{i-1}^\alpha x \text{ si } i > j+1 \end{Bmatrix}.$$

($\mathcal{G}$ 4)
$$\Gamma_j \Gamma_k = \begin{Bmatrix} \Gamma_{k+1} \Gamma_j \text{ si } j < k \\ \Gamma_k \Gamma_{j-1} \text{ si } j > j \end{Bmatrix}$$

($\mathcal{G}$ 5)
$$\Gamma_j (x \underset{i}{+} y) = \begin{Bmatrix} \Gamma_j x \underset{i}{+} \Gamma_j y \text{ si } i < j \\ \Gamma_j x \underset{i+1}{+} \Gamma_j y \text{ si } i > j \end{Bmatrix}$$

et

$$\Gamma_j (x \underset{j}{+} y) = (\Gamma_j x \underset{j+1}{+} \varepsilon_j y) \underset{j}{+} \Gamma_j y = (\Gamma_j x \underset{j}{+} \varepsilon_{j+1} y) \underset{j+1}{+} \Gamma_j y$$

chaque fois que le côté gauche est défini.

Un morphisme de ω-groupoïdes est une application cubique qui préserve toutes les opérations de groupoïdes et toutes les connexions; on dénote la catégorie ainsi définie des ω-groupoïdes par $\mathcal{G}$.

A partir d'un ω-groupoïde, on construit un complexe croisé $C = \gamma(G)$ en définissant $C_0 = G_0$, $C_1 = G_1$ et, pour chaque $p \in G_0$, $C_n(p) = \{ x \in G_n ; \partial_j^\alpha x = \varepsilon_1^{n-1} p \text{ pour tous } (\alpha, j) \neq (0, 1) \}$. L'addition dans $C_n(p)$ est induite par $\underset{i}{+}$ ($i \geq 2$) et elle est indépendante de i. L'application du bord $\delta : C_n \to C_{n-1}$ est induite par ∂_1^0, et l'action de C_1 sur C_n est définie par $x^a = \underset{n}{-}(\varepsilon_1^{n-1} a) \underset{n}{+} x \underset{n}{+} (\varepsilon_1^{n-1} a)$.

PROPOSITION 1. — *Le foncteur* $\gamma : \mathcal{G} \to \mathcal{C}$ *est une équivalence de catégories.*

Dans un ω-groupoïde G nous disons qu'un élément de G_n ($n \geqq 1$) est *mince* si on peut l'écrire comme un composé (relativement aux opérations $\underset{i}{+}$, $\underset{i}{-}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$) d'éléments de la forme $\varepsilon_j x$ ou $\Gamma_j x$ ($x \in G_{n-1}$). Les éléments minces forment un sous-ensemble T_n de G_n. Ils sont importants dans nos applications des ω-groupoïdes, principalement à cause de leur rapport avec le lemme d'addition des homotopies. Nous expliquons ici les axiomes simples auxquels ils satisfont, et qui étaient considérés initialement par Dakin (5) dans le cas simplicial.

Un T-*complexe* est une espèce particulière de complexe cubique de Kan. De façon précise, soit $K = \{K_n\}_{n \geq 0}$ un complexe cubique, et soient $T_n \subset K_n$ des ensembles donnés pour $n \geqq 1$. Nous appelons les éléments de T_n *minces* (en anglais « thin »). Nous disons que K est un T-*complexe* si :

($\mathcal{T}$ 1) $\varepsilon_i y$ est mince pour tous $y \in K_{n-1}$ ($n \geqq 1$, $i = 1, \ldots, n$).

($\mathcal{T}$ 2) Étant donné un (α, i) ($\alpha = 0, 1$; $i = 1, \ldots, n+1$) et des éléments (x_j^β) de K_n pour $\beta = 0, 1$; $j = 1, \ldots, n+1$; $(\beta, j) \neq (\alpha, i)$ tels que $\partial_k^\gamma x_j^\beta = \partial_{j-1}^\beta x_k^\gamma$ pour $k < j$ et (β, j), $(\gamma, k) \neq (\alpha, i)$, il existe un élément mince unique $x \in T_{n+1}$ tel que $\partial_j^\beta x = x_j^\beta$, $(\beta, j) \neq (\alpha, i)$.

($\mathcal{T}$ 3) Si t est un élément mince de K et si ses faces $\partial_j^\beta t$ sauf une sont minces, la face qui reste est mince aussi.

On dénote $\mathcal{T}$ la catégorie des T-complexes, dont les morphismes sont les applications cubiques qui transforment les éléments minces en éléments minces.

On peut montrer que, si G est un ω-groupoïde, l'ensemble cubique G avec les éléments minces décrits ci-dessus est un T-complexe. Inversement, étant donné un T-complexe K, il existe une structure unique de ω-groupoïde sur l'ensemble cubique K tel que les éléments minces décrits ci-dessus coïncident avec les éléments donnés de K. Ainsi, on démontre le résultat suivant :

PROPOSITION 2. — *Les catégories* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{T}$ *sont équivalentes.*

(*) Séance du 7 novembre 1977.

(1) A. L. BLAKERS, *Ann. Math.*, 49, 1958, p. 428-461.
(2) R. BROWN et P. J. HIGGINS, *Sur les complexes croisés d'homotopie de quelques espaces filtrés.*
(3) R. BROWN et P. J. HIGGINS, *On the Connection between the Second Relative Homotopy Groups of Some Related Spaces* [*Proc. London Math. Soc.* (à paraître)].
(4) R. BROWN et C. B. SPENCER, *Cah. de Top. Géom. Diff.*, 17, 1976, p. 343-362.
(5) M. K. DAKIN, *Thèse*, University of Wales, 1977.
(6) J. HÜBSCHMANN, N-*Fold Extensions of Groups* (preprint).
(7) J. HÜBSCHMANN, *Diss.*, *E.T.H.*, n° 5999, Zurich 1977.
(8) J. H. C. WHITEHEAD, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 1949, p. 452-496.

R. B. :
School of Mathematics and Computer Science,
University College of North Wales,
Bangor LL57 2UW,
Gwynedd,
U. K.

et

P. J. H. :
Department of Mathematics,
King's College,
Strand, WC2R 2LS,
London,
U. K.