TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE. — *Sur les complexes croisés d'homotopie associés à quelques espaces filtrés.* Note (*) de **Ronald Brown** et **Philip J. Higgins**, présentée par M. Henri Cartan.

Une généralisation du théorème de van Kampen est obtenue dans toutes les dimensions. On associe un carré co-cartésien de complexes croisés à certains carrés cocartésiens d'espaces filtrés.

The van Kampen Theorem is generalised to all dimensions by associating a pushout of crossed complexes with certain pushouts of filtered spaces.

Nous donnons ici les applications des résultats algébriques décrits dans ([4]).

La catégorie $\mathscr{C}$ des complexes croisés (sur groupoïdes) est définie dans ([4]).

Soit $X : X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots$ une filtration d'un espace X par des sous-espaces. Pour simplifier, nous supposons ici que X_0 est discret. Nous définissons le *complexe croisé d'homotopie* $C = \pi_* (X)$ de cette filtration à l'aide des formules : $C_0 = X_0$, $C_1 = \pi X_1 X_0$ [le groupoïde fondamental de X_1 sur X_0 comme défini dans ([2])], et pour chaque $p \in C_0$ et $n \geqq 2$, $C_n(p) = \pi_n(X_n, X_{n-1}, p)$. L'opération de C_1 sur C_n est standard, et les applications du bord $\delta : C_n \to C_{n-1}$ sont celles de la suite d'homotopie du triplet (X_n, X_{n-1}, X_{n-2}). Il est clair que π_* est un foncteur de la catégorie des espaces filtrés vers $\mathscr{C}$. En effet, $\pi_* (X)$ est l'exemple fondamental d'un complexe croisé [avec une autre terminologie $\pi_* (X)$ a été considéré par Blakers dans ([1]) et Whitehead dans ([5])].

THÉORÈME PRINCIPAL. — Supposons que le diagramme commutatif d'espaces filtrés

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & U \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{i}} \\ V & \xrightarrow[\bar{f}]{} & X \end{array}$$

satisfasse à l'une des deux hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSE $\mathscr{A}$. — Les applications i, f, $\bar{i}$, $\bar{f}$ sont des inclusions de sous-espaces, $X = \text{Int } U \cup \text{Int } V$ et, pour tous $n \geqq 0$, on a $Q_n = Q \cap X_n$, où $Q = U, V, W$.

HYPOTHÈSE $\mathscr{B}$. — Pour tous $n \geqq 0$, les applications $i_n : W_n \to V_n$ sont des cofibrations fermées et X_n est l'espace d'adjonction $U_n \bigcup_{f_n} V_n$.

Supposons aussi que, pour tous $n \geqq 1, r > n$, $Q = U$, V ou W et $p \in Q_0$ les applications

$$(\bigstar) \qquad \begin{gathered} \pi_n(Q_n, Q_{n-1}, p) \to \pi_n(Q_r, Q_{n-1}, p) \\ \pi_0(Q_0) \to \pi_0(Q_n) \end{gathered}$$

induites par l'inclusion soient surjectives.

Alors, le diagramme induit

$$\begin{array}{ccc} \pi_*(W) & \rightarrow & \pi_*(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_*(V) & \rightarrow & \pi_*(X) \end{array}$$

est cocartésien dans la catégorie des complexes croisés.

Remarque 1. — L'hypothèse $\mathscr{B}$ et les hypothèses de connectivité (★) sont satisfaites si U, V, W sont des CW-complexes avec la filtration par les squelettes, i : W → V est l'inclusion d'un sous-complexe, f : W → U est cellulaire, et X est l'espace d'adjunction $U \bigcup_f V$ avec sa structure standard comme CW-complexe.

Remarque 2. — Ce théorème contient la version groupoïdale du théorème de van Kampen [8.4.2 de (2)] et aussi du théorème C de (3).

Remarque 3. — Le théorème de réunion (théorème B) de (3) possède une généralisation analogue aux espaces filtrés.

Les corollaires utiles qui suivent, sont valables sous l'une ou l'autre des hypothèse $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{B}$. Dans chaque cas on prend pour X_0 le point de base $\{p\}$; nous ne ferons plus mention de p.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $n > 2$. *Si, pour* $Q = U, V, W$ *les espaces* Q, Q_1 *sont connexes par arcs et* $\pi_i(Q, Q_1) = 0$ *pour* $1 \leqq i \leqq n-1$, *alors le diagramme induit*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(W, W_1) & \rightarrow & \pi_n(U, U_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_n(V, V_1) & \rightarrow & \pi_n(X, X_1) \end{array}$$

est un carré cocartésien de modules sur le carré cocartésien de groupes

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(W_1) & \rightarrow & \pi_1(U_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V_1) & \rightarrow & \pi_1(X_1). \end{array}$$

On l'obtient à partir du théorème principal en prenant $X_i = X_1$, $1 \leqq i \leqq n-1$, $X_j = X$, $j \geqq n$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* $n > 2$. *Soit* U, V, W *connexes par arcs et supposons* $\pi_i(V, W) = 0$, $1 \leqq i \leqq n-1$. *Alors l'application d'excision* $\pi_n(V, W) \rightarrow \pi_n(X, U)$ *détermine* $\pi_n(X, U)$ *comme le module induit* $\lambda_* \pi_n(V, W)$, où $\lambda : \pi_1(W) \rightarrow \pi_1(U)$ *est induit par inclusion.*

Cela résulte du corollaire 1 en prenant $X_1 = U$ [dans (3) les résultats sont encore valables pour $n = 2$ mais en remplaçant « module » par « module croisé »].

La démonstration du théorème principal utilise la théorie des ω-groupoïdes décrite dans (4).

Nous considérons le n-cube I^n avec sa structure cellulaire standard, et la filtration de I^n par les squelettes $I^{n,r}$. Soit R (X) le complexe cubique qui, dans la dimension n, est l'ensemble des applications filtrées $I^n \rightarrow X$. Les opérations standards sur les cubes permettent de définir n opérations $\underset{i}{+}$ sur R (X) dans la dimension n, et aussi les connexions $\Gamma_i : R_n \rightarrow R_{n+1}$.

Soit ρ (X) le quotient de R (X) par la relation suivante : $x, y : I^n \rightarrow X$ sont *f-équivalents* si x est homotope à y par une homotopie h_t, $t \in I$, telle que chaque h_t soit une application filtrée $I^n \rightarrow X$.

La démonstration de la proposition suivante est technique, mais le résultat semble essentiel pour la démonstration de la proposition 2.

PROPOSITION 1. — *L'application quotient* $p : \mathrm{R}(\mathrm{X}) \rightarrow \rho(\mathrm{X})$ *est une fibration au sens de Kan.*

On a démontré en (4) qu'il existe un foncteur $\gamma : \mathscr{G} \rightarrow \mathscr{C}$ de ω-groupoïdes à complexes croisés.

PROPOSITION 2. — (i) *Les opérations* $\underset{i}{+}$, Γ_i *sur* $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ *induisent sur* $\rho(\mathrm{X})$ *une structure de ω-groupoïde.*

(ii) *Le complexe croisé* $\gamma\rho(\mathrm{X})$ *est naturellement isomorphe à* $\pi_*(\mathrm{X})$.

(iii) *Un élément* $\bar{x}$ *de* $\rho(\mathrm{X})_n$ *est mince* [*au sens de* (4)] *si et seulement s'il a un représentant* $x : \mathrm{I}^n \rightarrow \mathrm{X}$ *tel que* $x(\mathrm{I}^n) \subset \mathrm{X}_{n-1}$.

On démontre maintenant le théorème principal en montrant d'abord que sous ces conditions le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \rho(\mathrm{W}) & \rightarrow & \rho(\mathrm{U}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \rho(\mathrm{V}) & \rightarrow & \rho(\mathrm{X}) \end{array}$$

est un carré cocartésien dans la catégorie des ω-groupoïdes. La démonstration suit les mêmes idées générales que celles du théorème de réunion de (3), mais la formule explicite pour le lemme d'addition d'homotopie est remplacée par l'emploi d'éléments minces.

(*) Séance du 14 novembre 1977.

(1) A. L. BLAKERS, *Ann. Math.*, 49, 1948, p. 428-461.
(2) R. BROWN, *Elements of Modern Topology*, McGraw Hill, Maidenhead, 1968.
(3) R. BROWN et P. J. HIGGINS, *On the Connection between the Second Relative Homotopy Groups of Some Related Spaces* [*Proc. London Math. Soc.*, (3), 36, 1978].
(4) R. BROWN et P. J. HIGGINS, *Comptes rendus*, 285, série A, 1977, p. 997.
(5) J. H. C. WHITEHEAD, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55, 1949, p. 453-496.

R. B. :
School of Mathematics and Computer Science,
University College of North Wales,
Bangor LL57 2UW,
Gwynedd,
U.K.;

P. J. H. :
Department of Mathematics,
King's College,
Strand,
London,
WC2R 2LS.