TOPOLOGIE. — Excision homotopique en basse dimension. Note de **Ronald Brown** et **Jean-Louis Loday**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Remise le 6 février 1984.

On calcule l'obstruction à l'excision pour les groupes d'homotopie relatifs en basse dimension en l'exprimant sous la forme d'un produit tensoriel de groupes non abéliens. On en déduit une suite exacte de type EHP en homotopie et de nouveaux résultats sur l'homologie des groupes discrets. Les démonstrations utilisent une généralisation pour les carrés d'espaces du théorème de Van Kampen.

TOPOLOGY. — Homotopical Excision in Low Dimension.

The obstruction to excision for relative homotopy groups is calculated in low dimension in terms of a version of tensor product for non abelian groups. This gives an EHP-type exact sequence in homotopy and new results on the homology of discrete groups. The proofs rely on a new Van Kampen theorem for squares of spaces.

1. Produit tensoriel non abélien et excision homotopique. — Soient M et N deux groupes munis d'une action de M sur N notée ${}^{m}n$, $m \in M$, $n \in N$ et d'une action de N sur M notée ${}^{n}m$. Il est toujours sous-entendu qu'un groupe opère sur lui-même par conjugaison : ${}^{x}y = xyx^{-1}$. Par conséquent le produit libre $M * N$ opère à la fois sur M et sur N.

Le *produit tensoriel* (non abélien) de M et de N est par définition le groupe $M \otimes N$ ayant pour générateurs les couples (m, n), $m \in M$, $n \in N$, qu'on note $m \otimes n$, et pour relations :

$$(a) \qquad mm' \otimes n = {}^{m}(m' \otimes n)(m \otimes n),$$

$$(a') \qquad m \otimes nn' = (m \otimes n)\, {}^{n}(m \otimes n'),$$

où on a posé :

$$(b) \qquad {}^{p}(m \otimes n) = {}^{p}m \otimes {}^{p}n, \quad \text{pour } m, m' \in M, \ n, n' \in N \text{ et } p \in M * N.$$

Proposition 1. — *Les relations suivantes sont satisfaites dans* $M \otimes N$:

$$(c) \qquad {}^{m}(m^{-1} \otimes n) = (m \otimes n)^{-1} = {}^{n}(m \otimes n^{-1}),$$

$$(d) \qquad (m \otimes n)(m' \otimes n')(m \otimes n)^{-1} = {}^{[m,\, n]}(m' \otimes n'),$$

$$(e) \qquad (m\, {}^{n}m^{-1}) \otimes n' = (m \otimes n)^{n'}(m \otimes n)^{-1},$$

$$(e') \qquad m' \otimes ({}^{m}nn^{-1}) = {}^{m'}(m \otimes n)(m \otimes n)^{-1}.$$

Si, de plus, on a la condition de compatibilité des actions ${}^{({}^{n}m)}n' = {}^{nmn^{-1}}n'$, *alors on a la relation :*

$$(f) \qquad [m \otimes n, m' \otimes n'] = m\, {}^{n}m^{-1} \otimes m'\, {}^{n'}m'^{-1}, \qquad \text{où } [x, y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

Exemples. — Si M opère trivialement sur N et N opère trivialement sur M alors $M \otimes N$ est le produit tensoriel usuel $M^{ab} \otimes_{\mathbf{Z}} N^{ab}$ des groupes abélianisés. Pour G opérant sur lui-même par conjugaison, le groupe $G \otimes G$ a été étudié par K. Dennis [5]. Lorsque G est parfait (i. e. $G = [G, G]$) l'extension centrale $G \otimes G \xrightarrow{[,]} G$ est universelle.

Dans la suite de cette Note tous les espaces considérés sont pointés et ont le type d'homotopie d'un CW-complexe. Les applications respectent le point-base.

Théorème 1 (Obstruction à l'excision homotopique en basse dimension). — *On considère un espace* X *recouvert par deux ouverts* A *et* B, *d'intersection* $A \cap B = C$. *On suppose que ces quatre espaces sont connexes et que les paires* (A, C) *et* (B, C) *sont* 1-*connexes. On a alors une suite exacte de groupes d'homotopie :*

$$\pi_3(B, C) \to \pi_3(X, A) \to \pi_2(A, C) \otimes \pi_2(B, C) \to \pi_2(B, C) \to \pi_2(X, A) \to 0.$$

L'action de $\pi_2(A, C)$ sur $\pi_2(B, C)$ utilisée dans la construction du produit tensoriel est obtenue en envoyant $\pi_2(A, C)$ dans $\pi_1 C$, puis en utilisant l'action naturelle de $\pi_1 C$ sur $\pi_2(B, C)$. [Même remarque pour l'action de $\pi_2(B, C)$ sur $\pi_2(A, C)$.]

Le théorème 1 exprime que la triade (X; A, B) est 2-connexe et que :

$$\pi_3(X; A, B) = \pi_2(A, C) \otimes \pi_2(B, C).$$

L'application $(m, n) \mapsto m \otimes n$ de $\pi_2(A, C) \times \pi_2(B, C)$ dans le produit tensoriel est le produit triadique de Whitehead [1]. Ce théorème est une conséquence du théorème de Van Kampen énoncé au paragraphe 3.

Corollaire 1 (Suite EHP en basse dimension). — *Pour tout espace* X *connexe pointé, on a une suite exacte :*

$$\pi_2 X \xrightarrow{E} \pi_3 SX \xrightarrow{H} \pi_1 X \otimes \pi_1 X \xrightarrow{P=[,]} [\pi_1 X, \pi_1 X] \to 1.$$

2. Applications à l'homologie des groupes discrets. — Soient M et N deux sous-groupes distingués du groupe P. Soit X la somme amalgamée homotopique de K(P/M, 1) et de K(P/N, 1) au-dessous de K(P, 1) où $K(\pi, 1)$ désigne l'espace d'Eilenberg-MacLane de groupe fondamental π. On note $H_n(\pi)$ le groupe d'homologie $H_n(K(\pi, 1), \mathbf{Z})$.

Proposition 2. — *Les premiers groupes d'homotopie de* X *sont donnés par :*

$$\pi_1(X) = P/MN, \qquad \pi_2(X) = M \cap N/[M, N] \quad \text{et} \quad \pi_3(X) = \operatorname{Ker}(M \otimes N \xrightarrow{[,]} P).$$

Le calcul de π_1 résulte du théorème classique de Van Kampen. Le calcul de π_2 résulte d'une généralisation du théorème de Van Kampen aux applications ([2], [3]). Le calcul de π_3 résulte du théorème 1.

Notons $M \wedge N$ le quotient de $M \otimes N$ par le sous-groupe distingué engendré par les éléments $x \otimes x$, $x \in M \cap N$.

Corollaire 2. — *Soient* M *et* N *deux sous-groupes distingués de* P *tels que* P = MN. *Posons* $V = \operatorname{Ker}(M \wedge N \xrightarrow{[,]} P)$. *On a alors la suite exacte :*

$$H_3 P \to H_3(P/N) \oplus H_3(P/M) \to V \to H_2 P$$
$$\to H_2(P/N) \oplus H_2(P/M) \to M \cap N/[M, N] \to P^{ab} \to (P/M)^{ab} \oplus (P/N)^{ab} \to 0.$$

Corollaire 3. — *Soit* $1 \to R \to F \to G \to 1$ *une suite exacte de groupes telle que* $H_3 F = H_2 F = 0$ (e. g. F *libre*). *On a alors un isomorphisme :*

$$H_3 G = \operatorname{Ker}(R \wedge F \xrightarrow{[,]} F).$$

Ce résultat est à rapprocher de la formule de Hopf : $H_2 G = \operatorname{Ker}(R/[R, F] \to F^{ab})$.

Pour tout groupe G on définit $G \tilde{\wedge} G$ comme le quotient de $G \otimes G$ par le sous-groupe distingué engendré par $(g \otimes h)(h \otimes g)$, $g, h \in G$. C'est un groupe intermédiaire entre $G \otimes G$ et $G \wedge G$.

Proposition 3. — *Le groupe d'homotopie* $\pi_3(SK(G, 1))$ [*resp. d'homotopie stable* $\pi_2^s(K(G, 1))$, *resp. d'homologie* $H_2(G)$] *est isomorphe au noyau de l'homomorphisme* [,] *de* $G \otimes G$ (*resp.* $G \tilde{\wedge} G$, *resp.* $G \wedge G$) *dans* [G, G].

Le dernier isomorphisme est la description de C. Miller de $H_2(G)$ (*cf.* [5]).

3. Théorème de Van Kampen pour les carrés d'espaces. — Par *carré d'espaces* $\mathscr{X}$ on entend un diagramme commutatif :

$$\mathscr{X}\quad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ B & \xrightarrow{b} & X \end{array}$$

d'applications continues pointées entre espaces ayant le type d'homotopie de CW-complexes. La fibre homotopique d'une application f est notée $F(f)$. La fibre homotopique de l'application induite $F(f') \to F(a)$ est notée $F(\mathscr{X})$. Elle est canoniquement homéomorphe à la fibre homotopique de $F(f) \to F(b)$. On dit que le carré d'espaces $\mathscr{X}$ est *connexe* si les espaces X, $F(a)$, $F(b)$ et $F(\mathscr{X})$ sont connexes.

Dans [6] on a montré l'existence d'un foncteur Π de la catégorie des carrés d'espaces dans celles des carrés croisés que l'on va maintenant décrire. Un *carré croisé* (sous-entendu de groupes) est la donnée d'un diagramme commutatif de groupes :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\lambda'} & N \\ {\scriptstyle \lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ M & \xrightarrow{\mu} & P \end{array}$$

d'actions de P sur L, M, N (qui induisent des actions de M sur L et N *via* μ et de N sur L et M *via* ν) et d'une application $h : M \times N \to L$.

Ces données sont soumises aux conditions suivantes :

(i) Les homomorphismes λ et λ' préservent l'action de P. De plus, avec ces actions, les homomorphismes μ, ν et $\kappa = \mu\lambda = \nu\lambda'$ sont des modules croisés,

(ii) $\lambda h(m, n) = m\,{}^{n}m^{-1}$, $\lambda' h(m, n) = {}^{m}n n^{-1}$,

(iii) $h(\lambda l, n) = l\,{}^{n}l^{-1}$, $h(m, \lambda l) = {}^{m}l l^{-1}$,

(iv) $h(mm', n) = {}^{m}h(m', n)\, h(m, n)$, $h(m, nn') = h(m, n)\,{}^{n}h(m, n')$,

(v) ${}^{p}h(m, n) = h({}^{p}m, {}^{p}n)$,

pour tout $m, m' \in M$, $n, n' \in N$, $l \in L$, $p \in P$.

Le carré croisé fondamental $\Pi\mathscr{X}$ associé au carré d'espaces $\mathscr{X}$ est formé des groupes fondamentaux du carré des fibres :

$$\Pi\mathscr{X}\quad \begin{array}{ccc} \pi_1 F(\mathscr{X}) & \to & \pi_1 F(f') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1 F(f) & \to & \pi_1 C. \end{array}$$

Lorsque les applications de $\mathscr{X}$ sont des inclusions et que $C = A \cap B$ on a $\pi_1 F(f) = \pi_2(A, C)$, $\pi_1 F(f') = \pi_2(B, C)$, $\pi_1 F(\mathscr{X}) = \pi_3(X; A, B)$ et l'application h est donnée par le produit de Whitehead triadique [1].

Théorème 2 (Théorème de Van Kampen pour les carrés d'espaces). — *Soit* (U, V) *un recouvrement de* X *par deux ouverts. On note* $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ *et* $\mathscr{W}$ *les carrés d'espaces déduits par image inverse dans* $\mathscr{X}$ *de* U, V *et* $W = U \cap V$. *Supposons que les carrés d'espaces* $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ *et* $\mathscr{W}$ *soient connexes. Alors* $\mathscr{X}$ *est connexe et le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} \Pi\mathscr{W} & \to & \Pi\mathscr{U} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi\mathscr{V} & \to & \Pi\mathscr{X} \end{array}$$

est une somme amalgamée dans la catégorie des carrés croisés.

Le cas particulier $A=U$ et $B=V$ permet de démontrer le théorème 1.

THÉORÈME 3. — *Soit* $(X; A, B)$ *une triade* 2-*connexe avec* X-*connexe*, (X, A) *et* (X, B) 1-*connexes. Le groupe d'homologie* $H_3(X; A, B)$ *s'obtient à partir de* $\pi_3(X; A, B)$ *en passant au quotient par l'action de* $\pi_1(A \cap B)$ *et par l'image du produit de Whitehead triadique* (*i. e.* Im h).

Le théorème 2 généralise le théorème classique de Van Kampen pour les espaces ainsi que le théorème de Van Kampen pour les applications [3] utilisant les modules croisés.

Les démonstrations des résultats annoncés dans cette Note paraîtront dans [4]. Cet article contient un théorème de Van Kampen pour les n-cubes d'espaces, le rôle du groupe fondamental étant joué par un n-cat-groupe fondamental (*cf.* [6]).

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. L. BLAKERS et W. S. MASSEY, Products in Homotopy Theory, *Ann. of Math.*, (2), 58, 1953, p. 295-324.

[2] R. BROWN, Coproducts of Crossed P-modules: Applications to the Homology of Groups and to Second Homotopy Groups, *Topology*, (1984) (à paraître).

[3] R. BROWN et P. J. HIGGINS, Colimit Theorems for Relative Homotopy Groups, *J. Pure Appl. Algebra*, 22, 1981, p. 11-41.

[4] R. BROWN et J.-L. LODAY, *Van Kampen Theorems for Diagrams of Spaces* (à paraître).

[5] K. DENNIS, *In Search of New "Homology" Functors Having a Close Relationship to K-theory*, polycopié, non publié, 1976.

[6] J.-L. LODAY, Spaces with Finitely Many Nontrivial Homotopy Groups, *J. Pure Appl. Algebra*, 24, 1982, p. 179-202.

R. B. : *Department of Pure Mathematics, University College of North Wales, Bangor LL57 2UW, Royaume-Uni;*

J.-L. L. : *Institut de Recherche mathématique avancée, C.N.R.S., 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg.*